L2 MTH1314 2014-2015

Eléments de correction du TD 7

Solution de l'exercice 2

$$f_3(x,y) = x^2 + y^2 + 6 - 2xy.$$

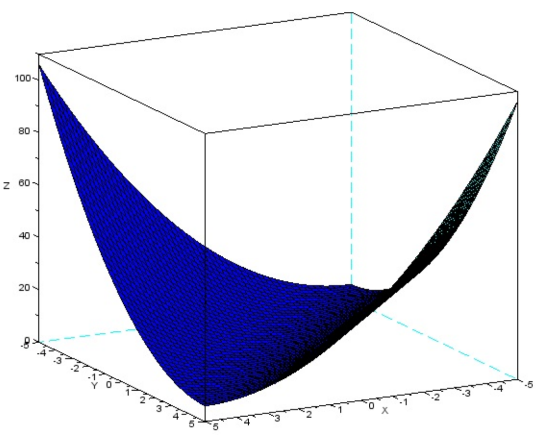
1. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,
$$\mathrm{grad} f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 2y - 2x \end{pmatrix}.$$

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\mathrm{grad} f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & = 2y \\ 2y & = 2x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = y.$$
Donc tous les points de la droite $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\}$ sont des points critiques.

3. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,
$$\mathrm{H} f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Soit (x,y) un point critique, id est $x = y$, la matrice hessienne étant constante vaut toujours en ces points $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Donc avec les notations de Monge,
$$rt - s^2 = 0.$$
Conclusion : on ne peut rien conclure.

5. Mais on se rend compte que toute cette armada est inutile dès le départ on aurait pû s'apercevoir que,
$$f_3(x,y) = (x-y)^2 + 6 \geqslant 6 = f_3(x,x).$$
Et donc tous les points critiques $x = y$ sont des minimums globaux.



$$f_4(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - (x+y)^4.$$

1. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{grad} f_4(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4(x+y)^3 \\ 8y - 4(x+y)^3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f_4(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= (x+y)^3 \\ 2y &= (x+y)^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{(x+y)^3}{2} = y \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= y \\ x &= \frac{(x+x)^3}{2} = 4x^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x &= y \\ 1 &= 4x^2 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ \text{ou} \\ x = y = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x = y = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a trois points critiques, $(0,0)$, $(1/2, 1/2)$ et $(-1/2, -1/2)$.

3. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{H} f_4(x,y) = \begin{pmatrix} 8 - 12(x+y)^2 & -12(x+y)^2 \\ -12(x+y)^2 & 8 - 12(x+y)^2 \end{pmatrix}.$$

4. Si $(x,y) = (0,0)$,

$$\mathrm{H} f_4(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Donc avec les notations de Monge,

$$rt - s^2 = 64 > 0 \qquad \text{et} \qquad r > 0.$$

Donc $(0,0)$ est un minimum local.
Si $(x,y) = (1/2, 1/2)$ ou $(x,y) = (-1/2, -1/2)$

$$\mathrm{H} f_4(1/2, 1/2) = \mathrm{H} f_4(-1/2, -1/2) = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Donc avec les notations de Monge,

$$rt - s^2 = 16 - 144 < 0.$$

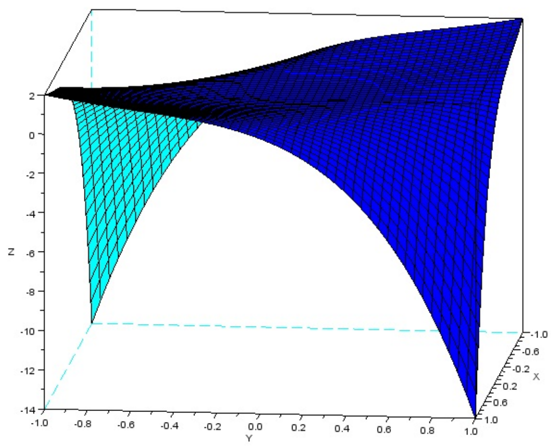
Donc $(1/2, 1/2)$ et $(-1/2, -1/2)$ ne sont pas des extremums. Plus précisément ce sont des points selles.

5. Puisque $(1/2, 1/2)$ et $(-1/2, -1/2)$ ne sont pas des extremums locaux ils sont encore moins globaux. Le point $(0, 0)$ n'est pas un minimum global car on remarque que

$$f_4(x, 0) = x^2 - x^4,$$

qui tend vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$. Ou même on a,

$$f_4(2, 0) = 4 - 16 < 0 = f_4(0, 0).$$



$$f_5(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2).$$

Notez tout d'abord que cette fonction n'est pas définie partout. Plus précisément son ensemble de définition est

$$D =]0, +\infty[\times\mathbb{R}.$$

1. Pour tout x et y dans D,

$$\operatorname{grad} f_5(x, y) = \begin{pmatrix} (\ln(x))^2 + y^2 + 2\ln(x) \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{D}$, puisque $x > 0$,

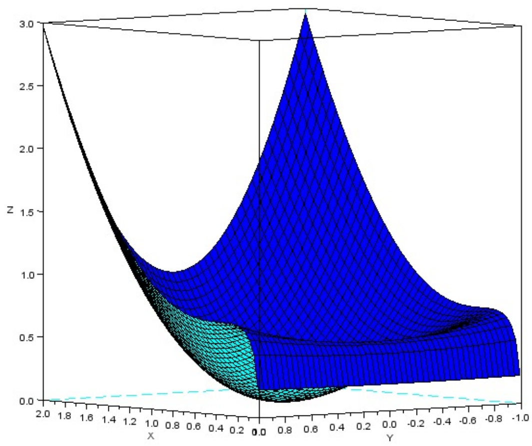
$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f_5(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln(x) + 2)\ln(x) + y^2 & = 0 \\ 2xy & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) & = (1, 0) \\ \text{ou} & \\ (x, y) & = (\mathrm{e}^{-2}, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a deux points critiques, $(1, 0)$ et $(\mathrm{e}^{-2}, 0)$.

3. Pour tout x et y dans D,

$$\mathrm{H} f_5(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2\ln(x)+2}{x} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

4. Si $(x,y)=(1,0)$,
$$\mathrm{H}f_5(1,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$
Donc avec les notations de Monge,
$$rt-s^2=4>0 \qquad \text{et} \qquad r>0.$$
Donc $(1,0)$ est un minimum local.
Si $(x,y)=(\mathrm{e}^{-2},0)$
$$\mathrm{H}f_5(\mathrm{e}^{-2},0)=\begin{pmatrix}-2\,\mathrm{e}^{2} & 0\\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{-2}\end{pmatrix}.$$
Donc avec les notations de Monge,
$$rt-s^2=-4<0.$$
Donc $(\mathrm{e}^{-2},0)$ est un point selle.
5. Le point $(1,0)$ est bien un minimum global car, puisque x est toujours positif, on a
$$f_5(x,y)=x((\ln x)^2+y^2)\geqslant 0=f_5(1,0).$$



Solution de l'exercice 3

1. Il s'agit juste de d'appliquer les formules du cours. Pour cela on calcule les dérivées partielles,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y-x.$$
Ainsi en $(1,1,f(1,1))$,
$$z=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=-1+x-1-3(y-1)=x-3y+1.$$
En $(1,2,f(1,2))$
$$z=-5-5(y-2)=5-5y.$$
En $(2,1,f(2,1))$
$$z=1+3(x-2)-4(y-1)=3x-4y-1.$$

2. L'équation de la tangente en $(1,1)$ est,

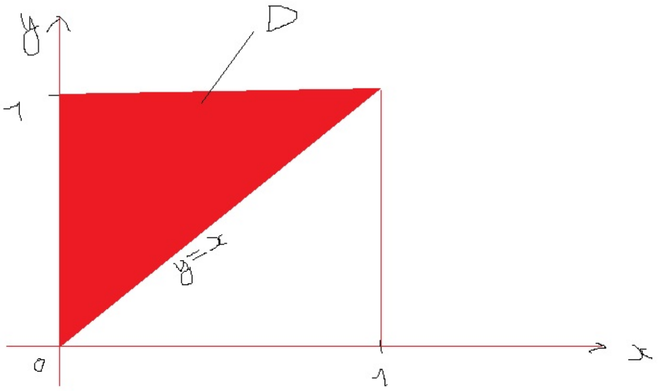
$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = x - 1 - 3(y-1) = x - 3y + 2.$$

Ou encore,

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Solution de l'exercice 4

1. Voici un chef d'oeuvre représentant D, (Picasso en verdisserait de jalousie)



Puisque les bornes en x dépendent de y, on intègre d'abord par rapport à x,

$$\begin{aligned}\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} x^2 + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{1}\left[\frac{x^3}{3} + yx\right]_{x=0}^{x=y}\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{1}\frac{y^3}{3} + y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{y^4}{12} + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

2. Bon ici pour D je me contente de dire que c'est le carré dont les sommets sont $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$. Il est plus facile de d'abord intégrer par rapport à y,

$$\begin{aligned}\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} x\sin(xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1}[-\cos(xy)]_{y=0}^{y=1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} 1 - \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x - \sin(x)]_{x=0}^{1} = 1 - \sin(1).\end{aligned}$$

Par rapport à x en premier est théoriquement faisable mais à quelques coups d'intégration par parties... que l'on va préférer éviter.